1) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

2) $\det A \neq 0$

$\Updownarrow$

2a) $\operatorname{Rang} A = n$

$\Updownarrow$

2b) A regulär

1), 2*) $\Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A^{-1}A = AA^{-1} = E = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Alg.

Sei $Ax = b$, bzw.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben.

(A quadratisch)

1) Ist A regulär?

a) $\longrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rang} A = n$

oder

b) $\operatorname{Rang} A = n$

(Wenn A nicht regulär

↳ gibt es keine

Inverse;

Wenn A regulär ist:

Wir schreiben neben A

die Einheitsmatrix der

gleichen Dimension an:

$$(A \mid E) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$$

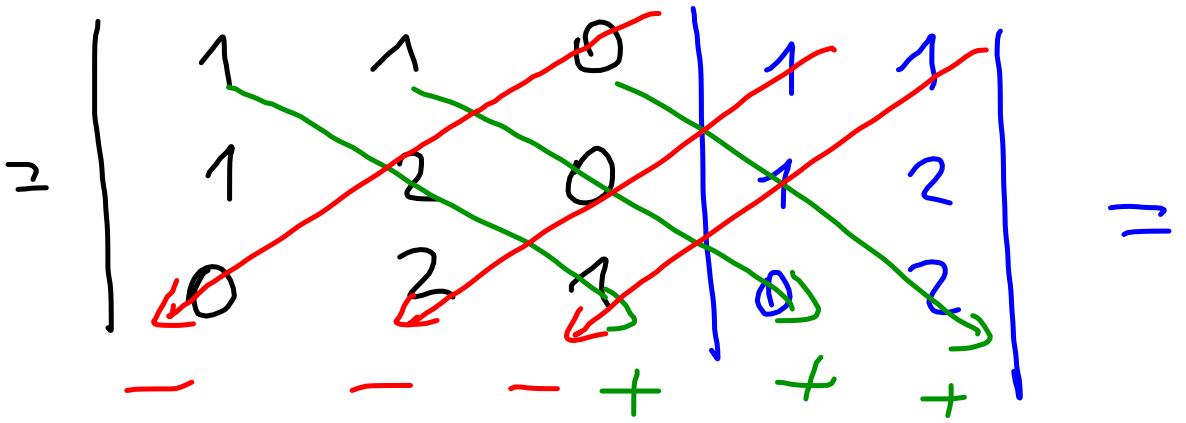
Mit dem Gauß-Algorithmus (wobei nach wie vor nur Zeilenoperationen erlaubt sind) wandeln wir diese erweiterte Matrix (A|E) so um, daß links (an der Stelle von A) die Einheitsmatrix steht. Dann in der anderen Hälfte von der erweiterten Matrix steht die Inverse

Zu A:

$$(E \mid A^{-1})$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$



$= 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 2 -$

$- 0\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 =$

$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = 1$

$\det A = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ A regulär

$\Rightarrow$ A invertierbar

2) Eigentliche Berechnung der Inversen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z2 \leftarrow z2 - z1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z3 \leftarrow z3 - 2 \cdot z2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$Z1 \leftarrow Z1 - Z2$

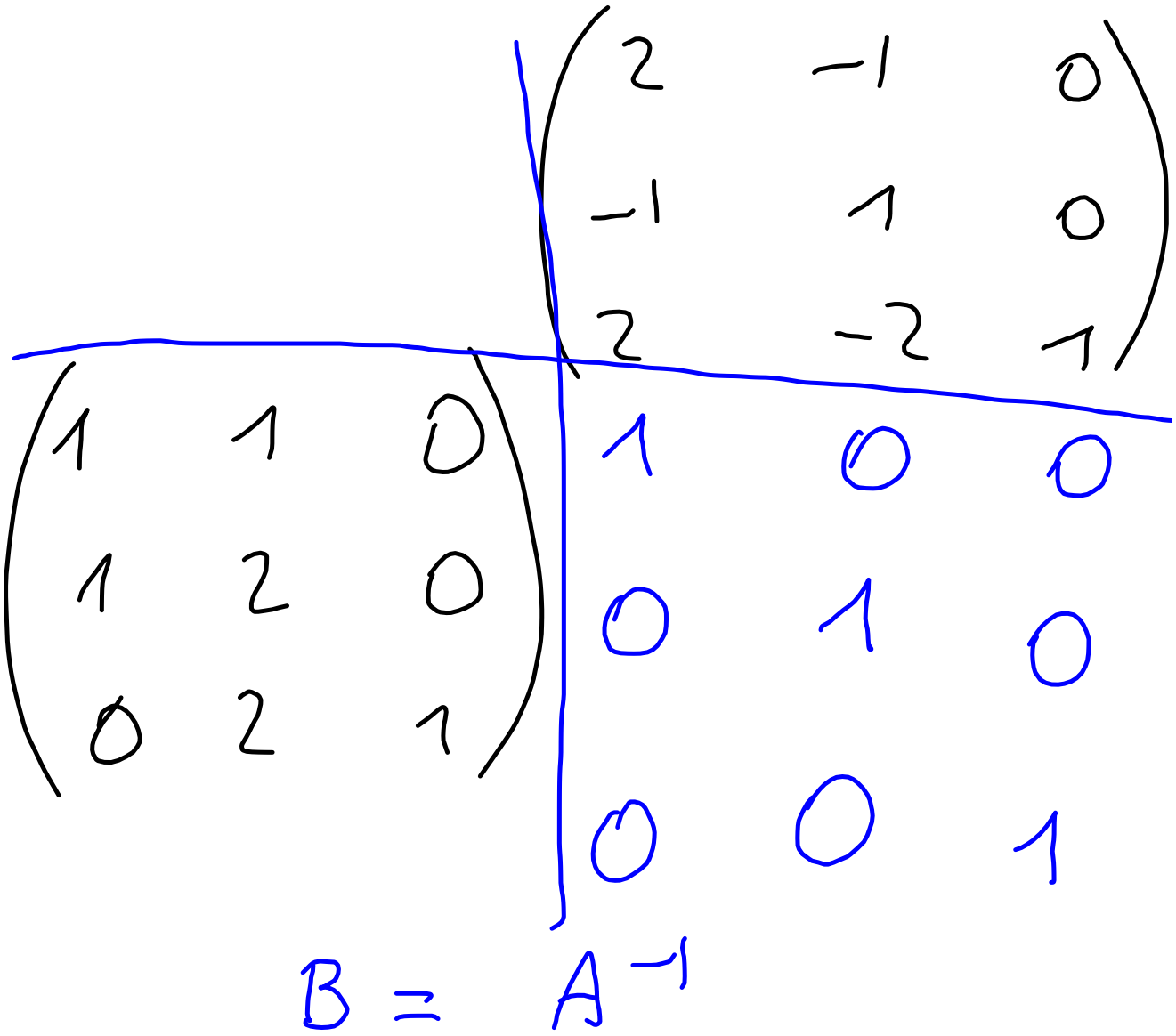
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(E \mid B)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$


2 −1 0
−1 1 0
2 −2 1
1 1 0
1 2 0
0 2 1
1 0 0
0 1 0
0 0 1
B = A^{-1}

C , D

$C \in \mathbb{R}^{n \times k}$

$D \in \mathbb{R}^{k \times m}$

$C \cdot D \in \mathbb{R}^{n \times m}$

"$=$"

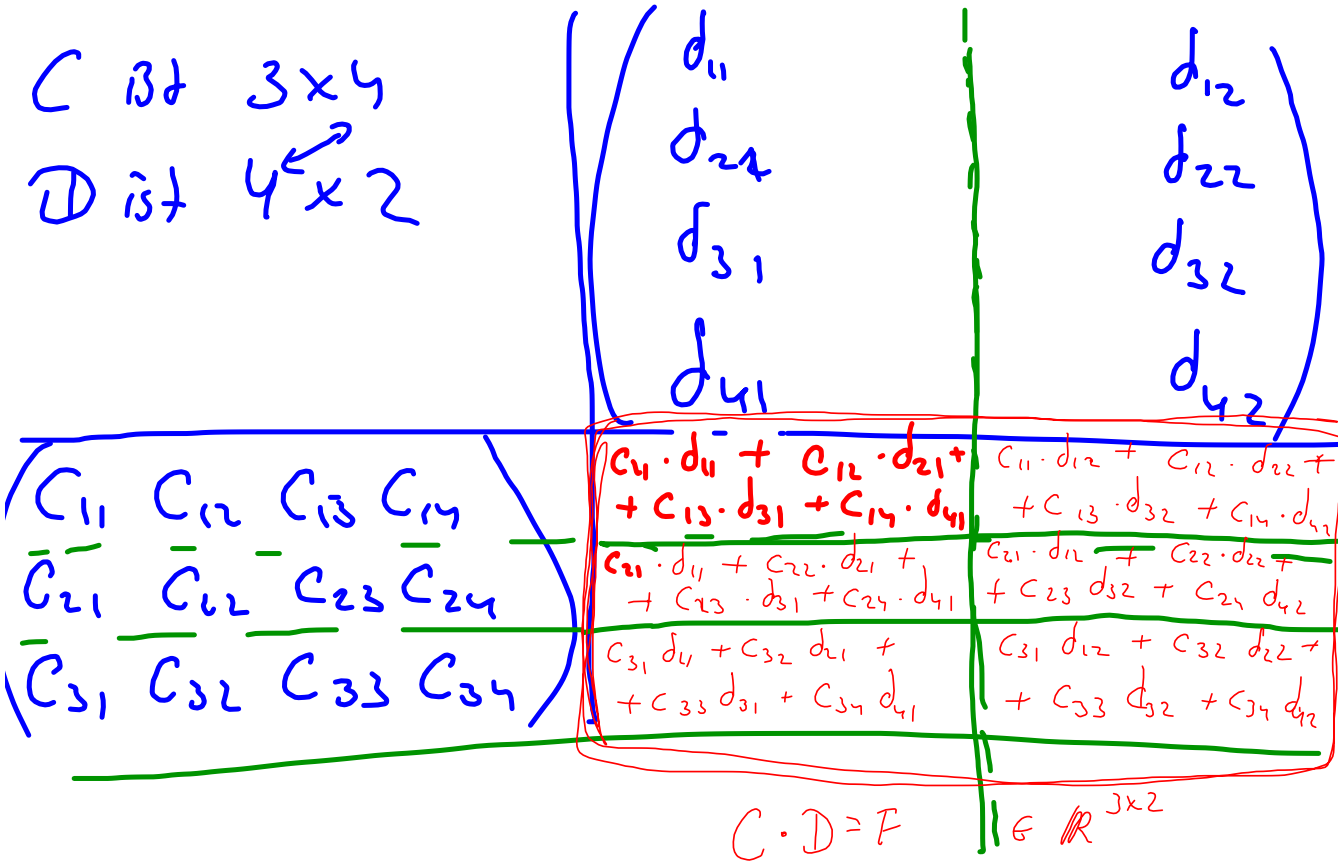
$(n \times k)(k \times m) = (n \times m)$ "

$$C = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, k \\ i = 1, \dots, h \end{matrix}$$

$$D = (d_{ij}) \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, k \end{matrix}$$

$$(C \cdot D) = F = (f_{ij}) \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, h \end{matrix}$$

$$f_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} c_{i\ell} \cdot d_{\ell j}$$


C ist 3x4
D ist 4x2
d_{11} d_{12}
d_{21} d_{22}
d_{31} d_{32}
d_{41} d_{42}
c_{11} c_{12} c_{13} c_{14}
c_{21} c_{22} c_{23} c_{24}
c_{31} c_{32} c_{33} c_{34}
$c_{11} \cdot d_{11} + c_{12} \cdot d_{21} + c_{13} \cdot d_{31} + c_{14} \cdot d_{41}$
$c_{11} \cdot d_{12} + c_{12} \cdot d_{22} + c_{13} \cdot d_{32} + c_{14} \cdot d_{42}$
$c_{21} \cdot d_{11} + c_{22} \cdot d_{21} + c_{23} \cdot d_{31} + c_{24} \cdot d_{41}$
$c_{21} \cdot d_{12} + c_{22} \cdot d_{22} + c_{23} d_{32} + c_{24} d_{42}$
$c_{31} d_{11} + c_{32} d_{21} + c_{33} d_{31} + c_{34} d_{41}$
$c_{31} d_{12} + c_{32} d_{22} + c_{33} d_{32} + c_{34} d_{42}$
$C \cdot D = F \in \mathbb{R}^{3x2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\det A - ?$

Ist $\det A \neq 0$

$\Downarrow$

2) $A^{-1} - ?$

3) $Ax = b_i, \quad x - ?$

$b_1 = (1, 0, 1, 0)^T$

$b_2 = (0, 1, 0, 1)^T$

Lsr

1)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

4x4 $\rightarrow$ Laplace'sche Entwicklg
z.B., nach der 1. Spalte:

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} +$$

$$+\ 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\ 0\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1.\vec{z} = 3.\vec{z}} =$$

$\Downarrow$

$\det = 0$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 2 + 0 + 2 - 0 - 3 - 1 =$$

$$= 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$B^{-1} - ?$

(1)

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Entw. nach der 4. Zeile:

$$= 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$$

$$= -1 \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z_3 \longleftrightarrow Z_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$Z_4 \leftarrow Z_4 - 2 \cdot Z_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$Z_1 \leftarrow Z_1 - Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

In mehreren Laborversuchen hat man 3 verschiedene Ergebnisvektoren gekriegt:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aus den Beobachtungen ist bekannt, dass

Die gemessene Größe $\vec{b_i}$ und gesuchte Größe $\vec{x}$ hängen linear von einander ab:

$$B\vec{x_i} = \vec{b_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

mit der Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sehen $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ aus?

Lösung:

$B\overline{x_i} = \overline{b_i}$ ist eindeutig lösbar, weil (s. oben) B regulär ist. Außerdem ist uns schon B^{-1} bekannt.

Denn: $B^{-1} B \overline{x_i} = B^{-1} \overline{b_i}$

$$\vec{x_i} = B^{-1} \cdot \vec{b_i}$$

Mit der berechneten

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = B^{-1}\bar{b}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\left(B \mid \bar{b}_1 \mid \bar{b}_2 \mid \bar{b}_3 \right)$$

Klassische iterative Verfahren

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = b.$$

$A = S - T$ mit

einer einfach zu

invertierenden Matrix S

(z.B. Diagonalmatrix oder Dreiecksmatrix),

so lässt man $Ax = b$ umformen in

$$Sx = Tx + b,$$

und mit dem Startwert (Startvektor) $x^{(0)}$ die Iteration

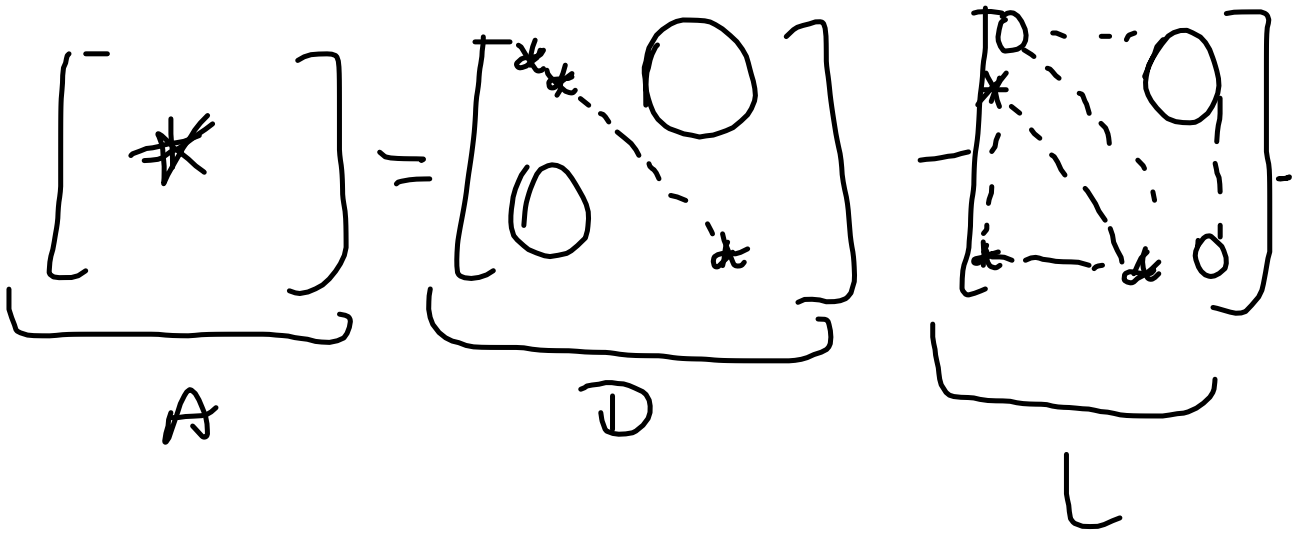
$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

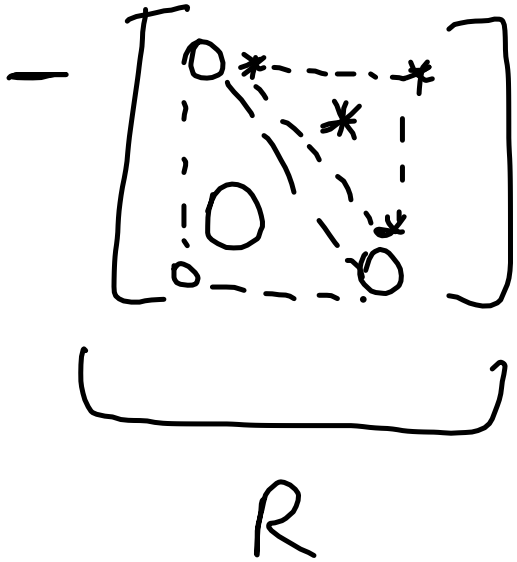
und, weil S leicht zu invertieren sein soll, so mit S^{-1}:

$$x^{(k+1)} = S^{-1}\left(Tx^{(k)} + b\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$A = D - L - R$ sei eine Aufspaltung von A in eine Diagonalmatrix D, eine echte/strikte untere Dreiecksmatrix L und eine echte/strikte obere Dreiecksmatrix R:





R

; $A = D - (L+R)$

Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverf.)

$S = D$

$T = L+R$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = D^{-1}\left((L+R)x^{(k)} + b\right)$$

Oder explizit:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} + b_i\right)$$

$$i = 1, \ldots, n$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

!!

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)} + 3; \\ 2x_2^{(k+1)} = x_1^{(k)} + 4; \end{cases}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(x_2^{(k)} + 3\right) \\ \frac{1}{2}\left(x_1^{(k)} + 4\right) \end{pmatrix}$$

$(k+1)$- Iteration $\leftarrow$ k-te Iteration

$1 \leftarrow 0$

$2 \leftarrow 1$

$3 \leftarrow 2$

k	$x_1^{(k+1)}$	$x_2^{(k+1)}$
0	0	0
1	1,5	2
2	2,5	2,75
3	2,875	3,25
4	3,125	3,438
...	...	...
9	3,327	3,661
10	3,331	3,664
11	3,332	3,666
12	3,333	3,666

Exakte Lösung!

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$z_2 \leftarrow z_2 + \frac{1}{2} z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

$$x_2 = \frac{11}{2} : \frac{3}{2} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} =$$

$$= 3,\overline{6}$$

$$x_1 = \left(3 + x_2\right)\frac{1}{2} =$$

$$= \left(3 + 3\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{20}{3 \cdot 2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} =$$

$$= 3,\overline{3}$$

Gauß - Seidel - Verfahren

(Einzelschrittverfahren)

$$S = D - L$$

$$T = R$$

$$(D - L)\, x^{(k+1)} = R\, x^{(k)} + b$$

führt auf explizite Formel:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} + b_i \right),$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x_2^{(k)} + 3\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x_1^{(k+1)} + 4\right)$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	1,5	2,75
2	2,875	3,348
3	3,174	3,587
4	3,294	3,647
5	3,324	3,662
6	3,331	3,666

Konvergenz-Satz:

Sei Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein **streng diagonaldominant** (d.h. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$),

dann konvergieren das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren gegen die

Lösung x des GS:

$$Ax = b$$

("konvergieren" $\Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ mit $Ax = b$)