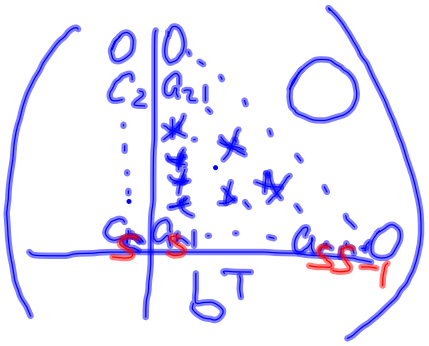
R-K-Verfahren:



Butcher-Schema

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + c_2 h_m, y_m + h_m a_{21} k_1)$$

$$\dots$$

$$k_s = f\left(x_m + c_s h_m, y_m + h_m \sum_{i=1}^{s-1} a_{s,i} \cdot k_i\right)$$

$$y_{m+1} = y_m + h_m \sum_{j=1}^{s} b_j k_j$$

R.-K.-V. der Ordnung 2

Alle Verfahren für $s=2$:

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + h_m c_2, y_m + h_m a_{21} k_1)$$

$$y_{m+1} = y_m + h_m b_1 k_1 + h_m b_2 k_2$$

Ziel: Parameterwahl für möglichst hohe Konsistenzordnung:

$$\psi_m = \frac{y(x_{m+1}) - y(x_m)}{h_m} - F(\dots) =$$

$$= \frac{y(x_{m+1}) - y(x_m)}{h_m} - b_1 f(x_m, y(x_m)) -$$

$$- b_2 f(x_m + c_2 h_m, y(x_m) + h_m a_{21} f(x_m, y(x_m)))$$

Taylor:

$$\frac{y(x_{m+1}) - y(x_m)}{h_m} = y' + \frac{h_m}{2} y'' + O(h^2)$$

$y'' = f_x + f \cdot f_y$

$y(x_{m+1}) = y(x_m + h_m)$

entw. in Taylor-Reihe an der Stelle x_m; $\Delta x = h_m$

$$y'' = (y')' = (f(x,y))' =$$

$y' = f(x,y)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' =$$

$$= f_x + f_y \cdot f$$

$f(x_m + c_2 h_m, \cancel{y_m} + a_{21} h_m f(x_m, \cancel{y_m})) =$

$y(x_m)$ $\qquad$ $y(x_m)$

$y_m \longleftarrow$ Aus dem Verfahren appr. Wert an der Stelle x_m

$y(x_m) \longleftarrow$ exakte Funkt. $y(x)$, ausgewertet an der Stelle x_m.

$$= f(x_m, y(x_m)) + c_2 h_m f_x(x_m, y(x_m)) + a_{21} h_m f(x_m, y(x_m)) \cdot f_y(x_m, y(x_m)) + O(h_m^2)$$

$$\Rightarrow \psi^{(1)} = \qquad y' = f$$

$$= f(x,y)^m$$

$$y' - (b_1 + b_2) f - h\,\dots$$

$$- h\left[\left(b_2 a_{21} - \tfrac{1}{2}\right) f f_y + \left(b_2 c_2 - \tfrac{1}{2}\right) f_x\right]$$

$$+ O(h^2)$$

1) für $b_1 + b_2 = 1$

$\Rightarrow$ Konsistenzbedingung

$\longrightarrow$ Mindestens Ordn. 1

2) für zusätzlich $\begin{cases} b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \\ b_2 c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\longrightarrow$ Mindestens K.-O. 2.

Satz: Es existiert kein 2-Stufiges R.-K.-Verf. der Ordnung 3.

4 Variablen: a_{21}, c_2, b_1, b_2

3 Gleichungen:

$\longrightarrow$ einparametrige Familie der R.-K.-V. der Ordn. 2:

Sei: $b_2 = \sigma$

$\Rightarrow$ $b_1 = 1 - \sigma$

$c_2 = \frac{1}{2\sigma}$ $\quad (\sigma \neq 0)$

$a_{21} = \frac{1}{2\sigma}$

Bsp:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$\sigma = 1$:

$\rightsquigarrow$ Bsp. von der letz. Mal, Modifiziertes Euler-Verf. (Runge 1895)

2) $\sigma = \frac{1}{2}$:

"Verfahren von Heun", 1900

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + c_2 h_m, y_m + h_m a_{21} k_1)$$

$$y_{m+1} = y_m + b_1 h_m k_1 + b_2 h_m k_2$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

s – # Stufen

p^* – maximale Konsistenzordnung

$n(s)$ – # Gleichungen (Bedingungen)

s	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
$n(s)$	1	3	6	11	21	42	91	207	
$p^*(s)$	1	2	3	4	4	5	6	6	$\leq s-2$

R.-K.-Methoden der Ordnung 3 und 4

$s=3$:

0	0	0	0
c_2	a_{21}	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0
	b_1	b_2	b_3

$h := h_m$ (Notation)

$k_1 = f(x_m, y_m)$

$k_2 = f(x_m + c_2 h, y_m + a_{21} h k_1)$

$k_3 = f(x_m + c_3 h, y_m + a_{31} h k_1 + a_{32} h k_2)$

$y_{m+1} = y_m + (b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) h$

Nach der Taylor-Entwickl. und Koeff.-Vergl. stellt sich heraus, dass:

- $b_1 + b_2 + b_3 = 1$
  Konsistenz-Bed.
  ($\rightarrow$ Ordnung mind. 1)
- $\begin{cases} c_2 b_2 + c_3 b_3 = \frac{1}{2} \\ b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{2} \end{cases}$
  $\rightarrow$ Ordnung mind. 2
- $\begin{cases} b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3} \\ b_2 c_2 a_{21} + b_3 c_3 (a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{3} \\ b_2 a_{21}^2 + b_3 (a_{31} + a_{32})^2 = \frac{1}{3} \\ b_3 c_2 a_{32} = \frac{1}{6} \\ b_3 a_{32} a_{21} = \frac{1}{6} \end{cases}$
  $\rightarrow$ Ordnung 3

8 Variablen, 8 Gleichungen, aber Redundanz

$\rightarrow$ 6 Gleichungen

$\Rightarrow$ Parameter nicht eindeutig Bestimmt

Für:

$$b_1 = 1 - b_2 - b_3$$

$$c_2 = a_{21}$$

$$c_3 = a_{31} + a_{32}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 b_2 + c_3 b_3 = \frac{1}{2} \\ c_2^2 b_2 + c_3^2 b_3 = \frac{1}{3} \\ c_2 b_3 a_{32} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

5 Var. 3 Gl.

Bem: 1) $b_3 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $a_{32} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ | notwendig

2) Für mehrstufige Konsistenzord. muss immer

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

gelten.

Bsp.:

1) Methoden von Heun (Ord. 3)

a)

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
1	-1	2	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Simpson-Regel zur Berechnung numerischer Quadratur)

b)

0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$