R.-K. 4. Ordnung
(s = p = 4)

Klassische R.-K.-Formeln

(Kutta, 1901)

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$y' = f(x,y)$

$$y(x) = y_0 + h \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt$$

Newton $\frac{3}{8}$-Regel (Int.-R.)

→ $\frac{3}{8}$-Regel von Kutta, 1901

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Schrittweitensteuerung

$$\frac{|\psi_m^{(1)}| h_m}{|y(x_{m+1}) - y(x_m)|} \leq TOL \quad \forall m$$

("Toleranz")

Fehlerschätzer:

$\hat{y}_m$ wesentlich bessere Näherung s/s y_m

y_m ist von Ordnung $p+1$ $\left(|\hat{\psi}_m^{(1)}| \ll |\psi_m^{(1)}|\right)$

- $\varepsilon_m := |\hat{y}_m - y_m| \approx |y(x_m) - y_m|$
- $\varepsilon_m \approx C h_m^{p+1} \ll TOL$

$$\Rightarrow C \approx \frac{\varepsilon_m}{h_m^{p+1}}$$

- akzeptable Schrittweite h_m^*

$$C (h_m^*)^{p+1} \approx \rho \cdot TOL$$

ρ = "Sicherheitsfaktor" (z.B. $\rho = \frac{1}{4}$)

$\Rightarrow$ neue Schrittweite:

$$h_{m+1} = \sqrt[p+1]{\frac{\rho \cdot TOL}{\varepsilon_m}} \cdot h_m$$

$\varepsilon_m \approx C h_m^{p+1}$

Eingebettete R.K.

Ziel: Effiziente Berechnung von y_n und $\hat{y}_n$

$\hat{y}_n$ RKV der Ordn. $p+1$

y_n RKV der Ordn. p

$\hat{c}$	$\hat{A}$
	$\hat{b}^T$

$\hat{y}_n$

c	A
	b^T

y_n

Typisch: 5(4), 8(7),

Problem:

Zusätzliche Berechnung von $\hat{y}_n$ erhöht Aufwand stark:

$\Longrightarrow$ **Wähle:**

$\hat{c} = c$, $\hat{A} = A$

$\hat{b} \neq b$,

$\Longrightarrow$ min. Verf.-Stufe $S^*(p+1)$ ist nicht erreichbar. ($S^*(p)$ für y_n schon)

Bsp: RK4(3)

(klass. RK-Verf. ($p=s=4$))

0					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
1	0	0	1		
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$

gleiche Koeff.:

$k_5^m = k_1^{m+1}$

$\Rightarrow$ Aufwandsreduktion

("Fehlberg-Trick")

$$k_5^m = f\left(x_{m+1}, y_m + h\left(\frac{1}{6}k_1^m + \frac{1}{3}k_2^m + \frac{1}{3}k_3^m + \frac{1}{6}k_4^m\right)\right)$$

$$k_1^{m+1} = f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) = k_5^m$$

$\Rightarrow$ vertretbarer Aufwand für Fehlerschätzung.

Impl. R.-K:

Bsp:

a) $s=1 \Rightarrow p=2$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1

$k_1 = f(x_n + \frac{1}{2}h_n,\ y_n + \frac{1}{2}h_n k_1)$

$y_{n+1} = y_n + h_n k_1;$

b) $s=2 \Rightarrow p=4$:

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

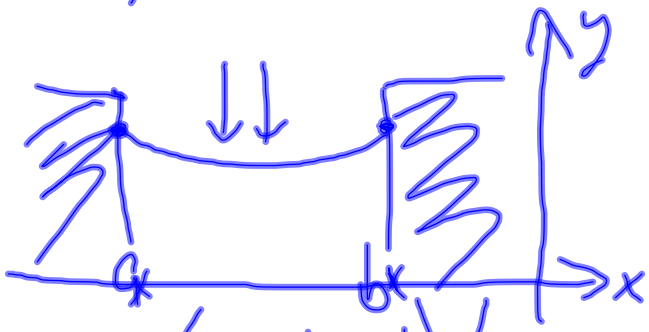
c)

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$s=3 \Rightarrow p=4$

Randwertprobleme

Bsp: Durchbiegung eines belasteten Seils



$$-\left(\mu(x)\,y'\right)' = k(x)$$

$\mu(x)$ – Spannung, $k(x)$ – Kraftdichte ($\text{Kraft} = \int k(x)\,dx$)

Bsp: elastischer Stab, fest eingel. Membran, u.s.w.

Bsp:

$$y'' + y = 0$$

$\longrightarrow$ Alg. Lösg:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\Rightarrow y = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

$$y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

$$y = e^{\lambda x};$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Qu. Gl. $\longrightarrow \ldots$

---

1) $y(0) = 0$
$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad [0, \frac{\pi}{2}]$

$y(x) = \begin{cases} c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0 \\ c_1 \sin\frac{\pi}{2} + c_2 \cos\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1;$

$\Rightarrow$ eind. Lösung:
$y(x) = \sin x;$

2) $y(0) = y(\pi) = 0$ $\quad [0, \pi]$

$\begin{cases} c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0 \\ c_1 \sin\pi + c_2 \cos\pi = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \\ 0 - c_2 = 0 \end{cases}$

$c_2 = 0$, c_1 beliebig.

$y(x) = c_1 \cdot \sin x$, $c_1 \in \mathbb{R}$
mehrdeutige Lösung,

c) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$

$\begin{cases} c_2 = 0 \\ -c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ keine Lösung

Bsp.: skalares lineares RWP 2. Ordnung:

$$(6.1)\quad \begin{cases} -y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), & x \in (a,b) \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Bem: $w(x) := y(x) -$

$$(6.2)\quad -\alpha\frac{x-b}{a-b} + \beta\frac{x-a}{b-a}$$

transformiert (6.1) auf RWP mit homogenen RBen:

$$\begin{cases} -y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}, \quad x \in (a,b)$$

Satz: (6.1) ist genau dann für alle $g \in C[a,b]$ (stetige auf $[a,b]$ Funktion), $\forall (\alpha,\beta)^T \in \mathbb{R}^2$ eindeutig lösbar, wenn das dazugehörige homogene Problem

($d.h.$ $g=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$)

nur die triviale Lösung hat ("Fredholm-Alternative")

2) Für $q(x) \geq 0$ hat das homogene Problem (6.1) nur die triviale Lösung.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} +$$

$$= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots\right)$$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$