17.05.2011

→ Woher die DGLen stammen (wo die Daten zu finden sind).

→ Euler

→ Existenzsätze

→ Eindeutigkeitssätze:

(*) $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

Peano: f stetig in $U(x_0)$

$\Downarrow$

$\exists$ Lösung $U(x_0)$

und diese Lösung lässt sich bis auf Gebietsgrenze erweitern

Picard: f stetig und f erfülle die L-Bed. bzgl. y; Dann:

$\exists!$ Lösung von (*) und diese Lösung lässt sich bis auf Gebietsgrenze erweitern

Stabilität

Aus L-Bedingung an f folgt die Stabilität:

Satz 2.3: Stabilität bzgl. des AB:

Erfüllt die stetige Fktn. $f(x,y)$ im Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$



eine Lipschitz-Bedingung, dann gilt für

(1) $y_1' = f(x, y_1)$, $y_1(x_0) = y_0^{(1)}$

(2) $y_2' = f(x, y_2)$, $y_2(x_0) = y_0^{(2)}$

die Abschätzung

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L(x-x_0)} \left| y_0^{(1)} - y_0^{(2)} \right|,$$

wobei L die Lipschitz-Konstante ist.

NB: $y(x_0) = y_0$ – Anfangsbed. $\Rightarrow x \geq x_0$

$|f(x,z_1) - f(x,z_2)| \leq L |z_1 - z_2|$

$\forall (x,z_1), (x,z_2) \in G$, $L < \infty$ unabh. von (x,z_i) (bzw. Lokal in $U(x_0)$)

$z_1 \neq z_2$, sonst L bel. $(0 < L \cdot 0)$

$$\Rightarrow \frac{|f(x,z_1) - f(x,z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq L$$

Ist f in einer $U(x_0)$ part. diffbar, so für $z_1 \to z_2$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(x,z) \right| \leq L \quad \text{in } U(x_0, z_2)$$

$\Rightarrow L$ kann als $\sup_{U(x_0,z_2)} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x,z) \right| =: L$ gewählt werden. und kann nicht kleiner gewählt werden, aber beliebig größer $< \infty$.

Z.B.: Sei in $U(x_0, z_0)$ $\sup \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = \sqrt{2}$.

L kann als $\sqrt{2}$ gewählt werden. $\sqrt{2}$ ist aber irrational $\rightarrow$ unbequem.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$

~~$L = 1{,}41 < \sqrt{2}$~~ ↯

IMMER AUFRUNDEN

NIE ABRUNDEN

Sup vs. max

$\max_I f(x) = y_0$

$\Longleftrightarrow \exists x_0 \in I: f(x_0) = y_0$ und $\forall x \in I \; f(x) \leq y_0$

$\sup_I f(x) = y_0$:

$\forall x \in I \; f(x) \leq y_0$ (*)

Wenn max existiert, dann max = sup.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x < 0$

$\sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = \sup_{x \in (-\infty,0)} \frac{1}{x} = 0$



$\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

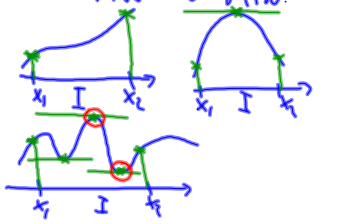
(*) Erweiterung: und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in I: |f(x) - \sup_I f| < \varepsilon$

"kleinste obere Schranke"

Analog inf und min

Hilfssatz: Sei $f(x)$ eine auf $I = [x_1, x_2]$ stetige Funktion. Dann existieren y_1 und $y_2 \in \mathbb{R}$, so daß $y_1 = \max_I f$, $y_2 = \min_I f$

"Stetige Funktn. nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Max und Min."



I abgeschl., f stetig.

$\Rightarrow \exists x_4 \in I: f(x_4) \geq f(x) \quad \forall x \in I$

z.B. Sei I nicht abgeschl.

$I = (-1, 3)$

$f(x) = 3x + 1$

- Stetig
- monoton steigend, sogar streng.



in -1 kein Min in 3 kein Max

$f(-1) = -2$

$-1 \notin I$

$\inf_I f = f(-1) = -2$

$\nexists$ Min, weil $(-1) \notin I$.

$\lim_{x \to -1} f = -2$

$\sup_I f = \lim_{x \to 3} (3x+1) = 10$

$3 \notin I \Rightarrow \nexists$ max.

< us ≤

Bsp (Instabilität / "Sensitivität")

AWP: $\vec{y}' = A\vec{y}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$

$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$

1) $f(\vec{y}) = A\vec{y}$

$\|A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2\| = \|A\cdot(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\|$

$\leq \|A\| \cdot \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$

$\|A\|$ – Matrixnorm, so eine Art "Betrag", eine Zahl $< \infty$

Bsple für $\|\cdot\|$:

– max-Norm: (Vektor):

$\|\bar{v}\|_\infty = \max_i \{|v_i|, v_i$ Vektorelement von $\bar{v}$ ist$\}$

$\bar{v} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{v} \in$

– Euklidische Norm, 2-Norm:

$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = |\bar{v}|$

– m.-Norm:

$\|v\|_m = \sqrt[m]{v_1^m + v_2^m + \dots + v_n^m}$

– 1-Norm:

$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$

– weitere Vektornormen.

Matrixnormen: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
  "Zeilensummennorm"
- $\|A\|_0 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$
- Frobenius-Norm:
  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$
- weitere Matrixnormen

Norm ist eine positive (nicht negative) Zahl mit:

(1) $\|\cdot\| \ge 0$
(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(3) Δ-Ungl.:
$\|x + \xi\| \le \|x\| + \|\xi\|$
x, ξ - passende Objekte (Zahl, Vektor, Matrix)

→ Max-Norm:
$\|A\|_{max} = \max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}|$

Zurück zum Bsp:
$L = \|A\|$
z.B. $\|A\| = \|A\|_F = \sqrt{10^2 + 1^2 + 9^2 + 0^2} = \sqrt{182}$
oder $\|A\| = \|A\|_\infty = 19$
oder $\|A\| = \|A\|_0 = 10$
u.s.w.
Wichtig: $\|A\| < \infty$
$\Rightarrow L < \infty$
$\Rightarrow f(x,y)$ erfüllt die L-Bedingung.
Unser Alg. ist stabil bzgl. AB.

Über endlichdimensionalen Raum (z.B. $\mathbb{R}^n$, $n < \infty$, $\mathbb{C}^n$, $n < \infty$, Raum der Schmiegungen (2D, Basis sin und cos), Raum aller Polynome von Grad $\le P$, $P < \infty$) sind alle Normen äquivalent:
Seien $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_0$ zwei Normen über Raum R (alle Objekte $v, u \in R$). Dann
$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$:
$c_1 \|u\|_0 \le \|u\|_* \le c_2 \cdot \|u\|_0$
$\forall u \in R$
Analog $\exists\, \bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbb{R}^+$:
$\bar{c}_1 \cdot \|u\|_* \le \|u\|_0 \le \bar{c}_2 \|u\|_*$
$c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ sind von u unabhängig!
