

## Übungsblatt 3

Numerische Integration.

### Aufgabe 1 (Klausur SS 2009)

Approximieren Sie unter Verwendung der Simpson-Regel und der Trapez-Regel

$$S(f) = (b - a) \left( \frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b) \right)$$

die folgende Integrale und geben Sie den auftretenden Quadraturfehler an, indem Sie die Integrale exakt berechnen. Vergleichen Sie jeweils den exakten Fehler mit dem a priori abgeschätzten Fehlerwert für das Trapez-Verfahren.

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^3 x - \cos 2x) dx,$$

$$I_2 = \int_2^3 \frac{x^3 - x}{2x^4 - 4x^2} dx.$$

Erläutern Sie kurz das jeweilige Resultat.

### Aufgabe 2

Approximieren Sie unter Verwendung der Simpson-Regel

$$S(f) = (b - a) \left( \frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b) \right)$$

die folgende Integrale und geben Sie den auftretenden Quadraturfehler an:

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^3 + 2x^2 + 1) dx,$$

$$I_2 = \int_{-a}^a x e^{x^2} dx, \quad (a > 0).$$

Erläutern Sie kurz das jeweilige Resultat.

### Aufgabe 3

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Leiten Sie die Simpson-Regel auf der folgende Art und Weise her:

Zu bestimmen sind Gewichte  $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  derart, daß die Quadraturformel

$$S(f) = w_0 f(a) + w_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_2 f(b)$$

das Integral  $\int_a^b P(x) dx$  für alle Polynome  $P$  zweites Grades exakt berechnet.

### Aufgabe 4

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f \in C^2([a, b])$  ( $f$  ist eine zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall  $[a, b]$ , d.h. auf  $[a, b]$  existieren stetige  $f'$  und  $f''$ ).

Leiten Sie für die Trapezregel

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

mit Hilfe von Taylor-Formel für  $f$  an der Stelle  $x \in [a, b]$  die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(f) \right| \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| (b-a)^3$$

ab.